15. ФУРИЈЕОВИ РЕДОВИ

ОСНОВНЕ ЧИЊЕНИЦЕ

15.1. Фуријеов ред је, као и степени, посебна врста функционалног реда. Сабирци су умношци функција облика $\sin kx$, $\cos kx$, $k \in \mathbf{N}$. Осим чисте радозналости, питања да ли се функција осим као сума степеног реда може представити и као сума тригонометријског реда, постоје и дубљи разлози за проучавање Фуријеових редова.

Наиме, степени ред се изласком у комплексни домен може свести на тригонометријски.

Заиста, ако је $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, и $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$, тада је $z = \cos t + i \sin t$, за неко t, па ако ставимо $a_n = \alpha_n + i\beta_n$ добијамо

$$(1) \quad \varphi(t) = f(e^{it}) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha_n + i\beta_n)(\cos nt + i \sin nt)$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} ((\alpha_n + i\beta_n) \cos nt + (-\beta_n + i\alpha_n) \sin nt).$$

Ово је посебно важно ако је полупречник конвергенције степеног реда једнак један. И општије, ако је полупречник једнак R, тада се за $|z| = R$, степени ред своди на ред облика (1), уз додатак умношка R^n. Управо тада, за $|z| = R$ Коши Адамаров став не говори ништа о конвергенцији степеног реда.

Ово није једина мотивација за проучавање Фуријеових редова. Сам Фурије, занимао се проблемима решавања парцијалних диференцијалних једначина и тим путем је стигао до потребе да задату функцију разложи у ред чији су сабирци тригонометријске функције. Метод се по њему зове Фуријеов метод. На примеру једначине жице која трепери описан је у вежбању 9.

15.2. Ако претпоставимо да је функција f сума неког тригонометријског реда, односно ако је

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{2}$$

коефицијенте a_n и b_n можемо наћи множењем једнакости (2) редом са 1, $\cos kx$, $\sin kx$ и интеграљењем, користећи при томе резултате

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx \,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \,\mathrm{d}x = 0, \quad \text{због непарности}\\
&\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n} \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0;\\
&\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(m+n)x + \cos(m-n)x}{2} \,\mathrm{d}x = 0, \quad m \neq n\\
&\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(m-n)x - \cos(m+n)x}{2} \,\mathrm{d}x = 0, \quad m \neq n,
\end{aligned} \tag{3}$$

односно интеграл производа две различите такве функције је нула, и

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 2nx}{2} \,\mathrm{d}x = \pi$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2nx}{2} \,\mathrm{d}x = \pi$$

Описаним поступком налазимо:

$$\begin{gathered}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \,\mathrm{d}x = 2\pi a_0/2;\\
\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \,\mathrm{d}x = \pi a_k; \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \,\mathrm{d}x = \pi b_k
\end{gathered} \tag{4}$$

Ако се на почетку извођења чинило сувишно што смо писали $a_0/2$ уместо само a_0, сада то добија смисао. Наиме, да бисмо имали јединствену формулу за све a-ове.

Примедба: Све ово има смисла ако важи $\int \sum = \sum \int$, па цело извођење није коректно, али ће нам послужити као мотивација.

Интеграли у (4) имају смисла кад год је функција f апсолутно интеграбилна у $(-\pi, \pi)$, у несвојственом смислу са могућим несвојственим тачкама унутар интервала.

15.3. Дефиниција. Нека је $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 2π-периодична функција и апсолутно интеграбилна на $[-\pi, \pi]$. Њен Фуријеов ред је

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{5}$$

где је

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \,\mathrm{d}x; \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \,\mathrm{d}x. \tag{6}$$

Делимична сума Фуријеовог реда функције f је

$$S_n(x;f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Уколико нема опасности од забуне, писаћемо и $S_n(x)$ уместо $S_n(x;f)$.

Претходна дефиниција, дата је за 2π-периодичну функцију. Како се свака функција дефинисана на сегменту $[-\pi,\pi]$ може периодично продужити, током читаве главе нећемо правити разлику између функција дефинисаних на $[-\pi,\pi]$ и њихових периодичних продужења.

С обзиром да је извођење формула (4) било неформално, ми уопште не знамо да ли и на који начин $S_n(x;f) \to f(x)$. Многи одговори на ово питање су изненађујући.

15.4. Став [Дирихлеово језгро]. Нека је $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, апсолутно интеграбилна функција на $[-\pi,\pi]$.

а) $S_n(x) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t)\,\mathrm{d}t$, где је

$$D_n(x) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin(n+1/2)x}{\sin(x/2)}.$$

б) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\,\mathrm{d}x = 1.$

Функција D_n назива се Дирихлеово језгро.

Доказ. а) Имамо:

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{n}\Bigg(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,\mathrm{d}t \cos kx + \\ &\qquad + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,\mathrm{d}t \sin kx\Bigg) = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2\pi} + \sum_{k=1}^{n}(\cos kt\cos kx + \sin kt \sin kx)\right]\mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(x-t)\right]\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

одакле је

$$D_n(x) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kx\right]. \tag{7}$$

Даље,

$$\begin{aligned}\pi D_n(x)-\frac{1}{2} &= \sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{1}{\sin(x/2)}\sum_{k=1}^{n}\cos kx\sin\frac{x}{2}=\\ &= \frac{1}{\sin(x/2)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left[\sin(k+\frac{1}{2})x-\sin(k-\frac{1}{2})x\right]=\\ &= \frac{1}{2\sin(x/2)}\left[\sin(n+\frac{1}{2})x-\sin\frac{x}{2}\right]=\frac{\sin(n+1/2)x}{2\sin(x/2)}-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

б) Следи из (7), јер

$$\int_{-\pi}^{\pi}D_n(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left(\frac{2\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,\mathrm{d}x\right)=1.$$

□

15.5. Комплексни облик Фуријеовог реда. Уместо (5) многи пишу

$$f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_ne^{inx};\quad S_n(x)=\sum_{k=-n}^{n}c_ke^{ikx}, \tag{8}$$

при чему су коефицијенти c_k одређени са

$$c_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-ikt}\,\mathrm{d}t, \tag{9}$$

на основу сличног запажања да је

$$\int_{-\pi}^{\pi}e^{int}e^{-ikt}\,\mathrm{d}t=\begin{cases}2\pi, & k=n\\ 0, & k\neq n\end{cases}.$$

Показаћемо да су делимични збирови редова (5) и (8) једнаки. Из (9), на основу $e^{-ikt}=\cos kt-i\sin kt$ одмах видимо

$$c_k=\begin{cases}(a_k-ib_k)/2, & k>0\\ a_0/2, & k=0\\ (a_{-k}+ib_{-k})/2, & k<0\end{cases},$$

односно

$$a_0=2c_0,\quad a_k=c_k+c_{-k},\quad b_k=i(c_k-c_{-k}).$$

Тада је

$$\begin{aligned}S_n=\sum_{k=-n}^{n}c_ke^{ikx}&=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left[c_ke^{ikx}+c_{-k}e^{-ikx}\right]=\\ &=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left[(c_k+c_{-k})\cos kx+i(c_k-c_{-k})\sin kx\right],\end{aligned}$$

што је и требало доказати.

15.6. Фуријеови редови на другим интервалима. Описали смо шта је Фуријеов ред 2π-периодичне функције. Ако је f функција периодична са периодом $2l$, онда је сменом $x = tl/\pi$ можемо свести на познат случај. Заиста, тада је $t \mapsto f(tl/\pi)$ 2π периодична, па можемо написати њен Фуријеов ред, а затим вратити смену. Добија се да је њен Фуријеов ред

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \tag{10}$$

где је

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} \, \mathrm{d}x, \qquad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \, \mathrm{d}x. \tag{11}$$

Извођење се своди на једноставну манипулацију са интегралима, па је изостављено.

У случају функције на $[a, b]$ линераном сменом промењливе можемо је периодично померити на интервал $[-l, l]$, где је $l = (b-a)/2$ и применити претходне формуле. То нећемо изводити.

Поменимо још и да се често тражи да се фунцкија дефинисана на интервалу $[0, l]$ развије у Фуријеов ред који садржи само синусе (односно само косинусе). То се да учинити продужавајући функцију на интервал $[-\pi, \pi]$ тако да буде непарна, односно парна.

КОНВЕРГЕНЦИЈА ФУРИЈЕОВОГ РЕДА ТАЧКА ПО ТАЧКА

15.7. Став [Риман Лебегова лема]. Нека је f апсолутно интеграбилна функција у интервалу $[a, b]$. Тада је

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \sin \lambda x = 0, \quad \text{и} \quad \lim_{\lambda \to +\infty} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cos \lambda x = 0,$$

равномерно по $\alpha, \beta \in [a, b]$.

Посебно низови Фуријеових коефицијената a_n, b_n дати са (6) теже ка нули.

Доказ. 1° случај - f је интеграбилна у својственом смислу. Као прво

$$\left| \int_{x_0}^{x_1} \sin \lambda x \, \mathrm{d}x \right| = \left| \frac{\cos \lambda x_0 - \cos \lambda x_1}{\lambda} \right| \le \frac{2}{\lambda}. \tag{12}$$

Нека је $\varepsilon > 0$ дато. Одаберемо $\delta > 0$ тако да за сваку поделу $\mathcal{P}'$ интервала $[a, b]$ чији је параметар мањи од δ важи $\overline{S}(f; \mathcal{P}') - \underline{S}(f; \mathcal{P}') < \varepsilon/2$. Поделимо интервал $[\alpha, \beta] \subseteq [a, b]$ поделом $\mathcal{P} : \alpha = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = \beta$ са параметром мањим од δ, и дату поделу проширимо до поделе интервала $[a, b]$ без увећања параметра. Биће $\overline{S}(f; \mathcal{P}) - \underline{S}(f; \mathcal{P}) \le \overline{S}(f; \mathcal{P}') - \underline{S}(f; \mathcal{P}') < \varepsilon/2$. Означимо

$m_k = \inf_{[x_{k-1},x_k]} f$, $\Omega_k = \sup_{[x_{k-1},x_k]} f - \inf_{[x_{k-1},x_k]} f$, $M = \sup_{[a,b]} |f|$. Имамо

$$\int_\alpha^\beta f(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x =$$
$$= \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x)-m_k)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^n m_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} \sin\lambda x\,\mathrm{d}x =$$
$$= S_1 + S_2.$$

Сваки од ова два сабирка се оцењује на следећи начин

$$|S_2| \le M\left|\sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \sin\lambda x\,\mathrm{d}x\right| = M\left|\int_\alpha^\beta \sin\lambda x\,\mathrm{d}x\right| \le \frac{2M}{\lambda},$$

$$|S_1| \le \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \Omega_k\cdot 1\cdot\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^n \Omega_k(x_k - x_{k-1}) = \overline{S} - \underline{S} < \varepsilon/2,$$

па је

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x\right| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\lambda} < \varepsilon, \quad \text{за } \lambda > \frac{4M}{\varepsilon}.$$

У оцени сабирка S_2 неједнакости $-M \le m_k \le M$ помножили смо интегралима синуса и онда просумирали.

2° случај. Ако је $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ несвојствен интеграл, са несвојственим тачкама $c_1,\dots,c_m$, онда одаберемо $\delta > 0$ тако да је $\sum_j \left|\int_{c_j-\delta}^{c_j+\delta} f(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon/2$, а ван $\bigcup_j (c_j-\delta, c_j+\delta)$ применимо први случај.

Идентичан доказ пролази и ако уместо sin ставимо cos. $\square$

Примедба: Једнакост (12) казује да је Риман Лебегова лема тачна када је f карактеристична функција интервала. Због линеарности лимеса, она је тачна и за њихове линеарне комбинације, то јест за део по део константне функције. Даљи део доказа заснива се на апроксимацији функције f део по део константном помоћу доњег Дарбуовог збира.

15.8. Став [Принцип локализације]. Нека је $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 2π-периодична и апсолутно интеграбилна функција на $[-\pi,\pi]$. Тада:

а) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(S_n(x) - \int_0^\delta [f(x+t)+f(x-t)]D_n(t)\,\mathrm{d}t\right) = 0$, за све $\delta > 0$;

б) Понашање Фуријеовог реда функције f у тачки x зависи само од вредности функције f у околини тачке x.

Примедба: Другим речима, на то да ли Фуријеов ред конвергира (и ако конвергира на његову суму) нема утицаја како f изгледа негде даље од тачке x. То делује помало изненађујуће, јер се коефицијенти рачунају преко интеграла и, према томе, измена функције директно мења коефицијенте.

Доказ. а) Имамо:

$$\begin{aligned}
S_n(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t) = \quad (\text{смена } x-t=\theta)\\
&= -\int_{x+\pi}^{x-\pi} f(x-\theta)D_n(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi} + \int_{-\pi}^{0} = \quad (\text{због } 2\pi \text{ периодичности})\\
&= \int_0^{\pi} (f(x-\theta)+f(x+\theta))D_n(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \quad (\text{јер је } D_n \text{ парна})\\
&= \int_0^{\delta} (f(x+\theta)+f(x-\theta))D_n(\theta)\,\mathrm{d}\theta + \int_{\delta}^{\pi} (f(x+\theta)+f(x-\theta))D_n(\theta)\,\mathrm{d}\theta.
\end{aligned}$$

Тако је

$$\begin{aligned}
&\left| S_n(x) - \int_0^{\delta} (f(x+\theta)+f(x-\theta))D_n(\theta)\,\mathrm{d}\theta \right| =\\
&\quad = \left| \int_{\delta}^{\pi} (f(x+\theta)+f(x-\theta))D_n(\theta)\,\mathrm{d}\theta \right| \le\\
&\quad \le \left| \int_{\delta}^{\pi} \frac{f(x-\theta)+f(x+\theta)}{2\pi\sin(\theta/2)} \sin(n+1/2)\theta\,\mathrm{d}\theta \right| \to 0, \quad \text{кад } n\to+\infty,
\end{aligned}$$

на основу Риман Лебегове леме, јер је због $\left|\frac{f(x-\theta)+f(x+\theta)}{2\pi\sin(\theta/2)}\right| \le \frac{|f(x-\theta)|+|f(x+\theta)|}{2\pi\sin(\delta/2)}$ реч о апсолутно интеграбилној функцији.

б) Непосредно следи из а). □

15.9. Став [критеријуми конвергенције I**].** Нека је $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 2π-периодична и апсолутно интеграбилна функција на $[-\pi,\pi]$, нека је $x\in\mathbf{R}$ и нека постоје $f(x-)$ и $f(x+)$ - лева и десна гранична вредност.

а) (*Динијев критеријум*) Ако за неко $\delta>0$ интеграл

$$\int_0^{\delta} \frac{\varphi_x(t)}{t}\,\mathrm{d}t, \quad \varphi_x(t) = f(x+t)+f(x-t)-f(x+)-f(x-),$$

апсолутно конвергира, тада $S_n(x)\to\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$, односно ка $f(x)$ у случају да је f непрекидна у x;

б) (*Липшицов критеријум*) Ако функција f у тачки x задовољава Липшицов услов

$$|f(x\pm t)-f(x\pm)| \le Lt^{\alpha}, \quad \text{за све } t>0 \text{ и неко } 0<\alpha\le 1, \tag{13}$$

тада $S_n(x)\to(f(x+)+f(x-))/2$;

в) Ако f има уопштене изводе у тачки x,

$$f'_+(x+) = \lim_{h\to 0+}\frac{f(x+h)-f(x+)}{h}; \quad f'_-(x-) = \lim_{h\to 0+}\frac{f(x-h)-f(x-)}{h},$$

тада $S_n(x)\to(f(x+)+f(x-))/2$. Посебно то важи за непрекидне функције које у свакој тачки имају леви и десни извод.

Доказ. Због принципа локализације, довољно је доказати

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\delta}(f(x+t)+f(x-t))D_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}.$$

а) Како је $\int_0^\pi D_n = 1/2$, то је

$$\int_0^\delta (f(x+t)+f(x-t))D_n(t)\,\mathrm{d}t - \frac{f(x+)+f(x-)}{2} =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\delta \frac{\varphi_x(t)}{t}\frac{t}{\sin(t/2)}\sin(n+1/2)t\,\mathrm{d}t + (f(x+)+f(x-))\int_\delta^\pi D_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Први сабирак тежи ка нули, на основу Риман Лебегове леме, јер је $\frac{t}{\sin(t/2)}$ ограничена, а $\varphi_x(t)/t$ апсолутно интеграбилна функција на $[0,\delta]$. Други сабирак је једнак

$$(f(x+0)+f(x-))\int_0^\pi g(t)\sin(n+\frac{1}{2})\,\mathrm{d}t,$$

где је $g(t)$ функција једнака нули на $[0,\delta)$, односно $1/\sin(t/2)$, на $[\delta,\pi]$, дакле ограничена функција, и тиме интеграбилна, па и он тежи ка нули на основу Риман Лебегове леме.

б) следи из а), јер је у том случају

$$\left|\frac{\varphi_x(t)}{t}\right| \le \left|\frac{f(x+t)-f(x+)}{t}\right| + \left|\frac{f(x-t)-f(x-)}{t}\right| \le \frac{2L}{t^{1-\alpha}}.$$

в) следи из б), јер из егзистенције извода следи Липшицов услов (13), уз $\alpha=1$. □

Примедба: Ако важи (13) за $\alpha>1$, онда се преласком на лимес, добија $f'\equiv 0$, односно f је константна. Тако Липшицов услов има смисла искључиво за $\alpha\le 1$.

15.10. Лема. Нека је h растућа функција, дефинисана у некој десној околини нуле. Тада је

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^\delta h(t)\frac{\sin\lambda t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}h(0+).$$

Доказ. Предефинишемо, по потреби, функцију h, тако да буде $h(0)=h(0+)$ (то не мења вредност интеграла). Имамо

$$\int_0^\delta h(t)\frac{\sin\lambda t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^\delta (h(t)-h(0))\frac{\sin\lambda t}{t}\,\mathrm{d}t + h(0)\int_0^\delta \frac{\sin\lambda t}{t}\,\mathrm{d}t = I_1+I_2.$$

Други сабирак се сменом $\lambda t = y$ своди на Дирихлеов интеграл

$$I_2 = h(0)\int_0^{\lambda\delta}\frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y \to h(0)\frac{\pi}{2},$$

док на други применимо II теорему о средњој вредности:

$$I_2 = \int_0^\delta (h(t)-h(0))\frac{\sin\lambda t}{t}\,\mathrm{d}t = (h(\delta)-h(0))\int_\xi^\delta \frac{\sin\lambda t}{t}\,\mathrm{d}t =$$
$$= (h(\delta)-h(0))\int_{\lambda\xi}^{\lambda\delta}\frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y \to 0,$$

јер је $\int_0^{+\infty}\frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y$ конвергентан.

Примедба: Овде је важно да је $\xi > 0$, што друга теорема о средњој вредности не гарантује. Међутим, ако је $\xi = 0$, тада је

$$\int_0^\delta [h(\delta) - h(t)] \frac{\sin \lambda t}{t} \, \mathrm{d}t = 0,$$

при чему је подинтегрална функција увек ≥ 0, одатле следи да је h константна функција, то јест да је $h(t) \equiv h(0)$, па је I_2 идентички једнак нули.

И у наредним доказима ћемо употребљавати другу теорему о средњој вредности, за $\xi > 0$. Образложење зашто ξ не може да буде нула нећемо понављати. $\square$

15.11. Став [Критеријуми конвергенције II**].** Нека је $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 2π-периодична и апсолутно интеграбилна функција на $[-\pi, \pi]$.

а) (*Жордан Дирихлеов критеријум*) Ако је f ограничене варијације у $(x - \delta, x + \delta)$, за неко $\delta > 0$, тада $S_n(x) \to (f(x+) + f(x-))/2$;

б) (*Дирихлеов критеријум*) Ако f има коначно много прекида прве врсте, и коначно много екстремних вредности, тада $S_n(x) \to (f(x+) + f(x-))/2$.

(Постојање левог и десног лимеса није спорно, јер је f ограничене варијације.)

Доказ. а) Довољно је доказати за случај растуће функције, јер је свака функција ограничене варијације разлика две растуће, а пресликвања $f \mapsto S_n(x, f)$ и $f \mapsto (f(x+) + f(x-))/2$ су линеарна.

На основу претходне леме имамо

$$\int_0^\delta f(x+t) D_n(t) \, \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} \int_0^\delta f(x+t) \frac{t/2}{\sin(t/2)} \frac{\sin(n+1/2)}{t} \, \mathrm{d}t \to$$
$$\to \frac{1}{\pi} f(x+) \frac{\pi}{2} = \frac{f(x+)}{2},$$

јер су функције $t \mapsto f(x+t)$ и $t \mapsto \frac{t/2}{\sin(t/2)}$ растуће и позитивне, и $\lim\limits_{t \to 0+} \frac{t/2}{\sin(t/2)} = 1$. Слично је и

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^\delta f(x-t) D_n(t) \, \mathrm{d}t = \frac{f(x-)}{2}.$$

б) следи из а), јер таква функција има ограничену варијацију. $\square$

15.12. Напомена. Иако се Фуријеов ред 2π периодичне функције може написати само под условом да је она апсолутно интеграбилна, до сада нисмо доказали да Фуријеов ред конвергира полазној функцији, чак ни под слабијом претпоставком да је непрекидна. Поред непрекидности ту се увек јавља још неки услов. Те да неки интеграл конвергира, те нека уопштена диференцијабилност, те да има ограничену варијацију итд. Јачи резултат није ни могуће доказати, јер је још 1876. године ди Буа Рејмон конструисао пример непрекидне функције чији Фуријеов ред дивергира у појединим тачкама. Скица ове конструкције изложена је у вежбањима 5 и 6.

РАВНОМЕРНА КОНВЕРГЕНЦИЈА ФУРИЈЕОВИХ РЕДОВА

Делимичне суме Фуријеовог реда $S_n(x; f)$ су непрекидне функције као коначна сума непрекидних. Отуда, уколико $S_n(x; f) \rightrightarrows f(x)$ неминовно следи непрекидност функције f. Стога ћемо током овог одељка посматрати искључиво непрекидне функције. Зато неће бити израза $(f(x+) + f(x-))/2$, већ једноставно само $f(x)$.

У свему осталом, па и у доказима, тврђења која се односе на равномерну конвергенцију Фуријеовог реда, потпуно су налик одговарајућим тврђењима о обичној, тј. тачка по тачка конвергенцији. Чак имају иста имена.

У доказима, међутим, не можемо да користимо принцип локализације, јер он утврђује само обичну, а не и равномерну конвергенцију, што ће учинити њихову техничку страну сложенијом.

15.13. Став [Критеријуми равномерне конвергенције I]. Нека је $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 2π периодична функција, апсолутно интеграбилна на $[-\pi, \pi]$. Нека је још f непрекидна на $[a, b]$.

а) (*Динијев критеријум*) Ако за неко $\delta > 0$ интеграл

$$\int_0^\delta \frac{|\varphi_x(t)|}{t}\,\mathrm{d}t, \quad \varphi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x),$$

конвергира равномерно по $x \in [a, b]$, тада $S_n(x) \rightrightarrows f(x)$, по $x \in [a, b]$;

б) (*Липшицов критеријум*) Ако за неко $\delta > 0$ функција f у $[a - \delta, b + \delta]$ задовољава Липшицов услов

$$|f(x) - f(y)| \le L|x - y|^\alpha, \quad 0 < \alpha \le 1, \tag{14}$$

тада $S_n(x) \rightrightarrows f(x)$, по $x \in [a, b]$;

в) Ако је f диференцијабилна у $[a, b]$, и $|f'(x)|$ ограничен у $[a, b]$ тада $S_n(x) \rightrightarrows f(x)$, по $x \in [a, b]$.

Доказ. а) Имамо:

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\varphi_x(t)}{2\sin(t/2)}\sin(n + 1/2)t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^\delta + \frac{1}{\pi}\int_\delta^\pi = I_1 + I_2.$$

Прво покажимо да $I_2 \rightrightarrows 0$. Наиме, функција $t \mapsto \frac{1}{\sin(t/2)}$ је растућа функција, па применом друге теореме о средњој вредности налазимо

$$\pi I_2 = \frac{1}{2\sin(\delta/2)}\int_\delta^\xi \varphi_x(t)\sin(n + 1/2)t\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_\xi^\pi \varphi_x(t)\sin(n + 1/2)t\,\mathrm{d}t.$$

Оба интеграла у претходној формули равномерно конвергирају ка нули (по $x \in [a, b]$), јер је на пример

$$\int_\delta^\xi f(x+t)\sin(n + 1/2)t\,\mathrm{d}t = \int_{\delta+x}^{\xi+x} f(y)\sin(n + 1/2)(y - x)\,\mathrm{d}y,$$

па резултат следи после примене адиционе формуле и Риман Лебегове леме (за sin и за cos).

Прелазимо на интеграл I_1.

$$\begin{aligned} |I_1| &= \left|\frac{1}{\pi}\int_0^\delta \frac{\varphi_x(t)}{t}\frac{t/2}{\sin(t/2)}\sin(n+1/2)t\,\mathrm{d}t\right| \le \\ &\le \frac{1}{\pi}\int_0^\delta \left|\frac{\varphi_x(t)}{t}\right|\cdot\left|\frac{t/2}{\sin(t/2)}\right|\mathrm{d}t \le \frac{M}{\pi}\int_0^\delta \frac{|\varphi_x(t)|}{t}\,\mathrm{d}t < \varepsilon/2, \end{aligned}$$

за δ довољно мало и све x. (M је горње ограничење функције $t \mapsto \frac{t/2}{\sin(t/2)}$.)

Примедба: У претходном расуђивању важан је редослед бирања. Дакле, за дато ε, прво одредимо δ, тако да $|I_1| < \varepsilon/2$, и оно *не зависи* од n! Затим нађемо довољно велико n, тако да $|I_2| < \varepsilon/2$. Редослед је важан, јер I_2, (а тиме и n_0) зависи од δ!

б) Из услова (14) следи да је

$$|\varphi_x(t)| = |f(x+t)+f(x-t)-2f(x)| \le |f(x+t)-f(x)|+|f(x-t)-f(x)| \le 2L|t|^\alpha,$$

па је $\dfrac{|\varphi_x(t)|}{t} \le \dfrac{2L}{|t|^{1-\alpha}}$, равномерно по x, одакле важи услов претходне тачке.

в) Познатом применом Лагранжове теореме о средњој вредности, из ограничености извода следи Липшицов услов са $\alpha = 1$. □

15.14. Лема. Ако је за неко $\delta > 0$ функција h монотона у $[a-\delta, b+\delta]$, тада

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^\delta h(x+t)\frac{\sin\lambda t}{t}\,\mathrm{d}t = h(x+), \quad \text{равномерно по } x \in [a,b].$$

Доказ. Као и у доказу Леме 15.10, по потреби предефинишемо функцију h, тако да буде $h(x) = h(x+)$. Тада

$$h(x+)\int_0^\delta \frac{\sin\lambda t}{t}\,\mathrm{d}t \rightrightarrows \frac{\pi}{2}h(x+), \quad \text{јер је } h \text{ ограничена у } [a,b].$$

С друге стране, применом друге теореме о средњој вредности, налазимо

$$\begin{aligned} \int_0^\delta (h(x+t)-h(x))\frac{\sin\lambda t}{t}\,\mathrm{d}t &= (h(x+\delta)-h(x))\int_\xi^\delta \frac{\sin\lambda t}{t}\,\mathrm{d}t = \\ &= (h(x+\delta)-h(x))\int_{\lambda\xi}^{\lambda\delta}\frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y \rightrightarrows 0, \end{aligned}$$

јер је први чинилац равномерно ограничен, а други тежи ка нули и не зависи од x. (И овде важи исто образложење зашто ξ није нула, као и у параграфу 15.10) □

15.15. Став [Критеријуми равномерне конвергенције II]. Нека је $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 2π-периодична и апсолутно интеграбилна функција на $[-\pi, \pi]$.

а) (*Жордан Дирихлеов критеријум*) Ако је f ограничене варијације у $[a-\delta, b+\delta]$, за неко $\delta > 0$, тада $S_n(x) \rightrightarrows f(x)$, равномерно по $x \in [a,b]$;

б) (*Дирихлеов критеријум*) Ако је f непрекидна и има коначно много екстремних вредности у $[a-\delta, b+\delta]$, тада $S_n(x) \rightrightarrows f(x)$, равномерно по $x \in [a,b]$.

Доказ. а) Као и у претходном одељку, довољно је доказати за растућу функцију f. Имамо

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (f(x+t)+f(x-t))\frac{t/2}{\sin(t/2)}\frac{\sin(n+1/2)t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Функција $t \mapsto \frac{t/2}{\sin(t/2)}$ је растућа, у нули је једнака један, па примењујемо другу теорему о средњој вредности

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x+t)\frac{t/2}{\sin(t/2)}\frac{\sin(n+1/2)t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^\xi f(x+t)\frac{\sin(n+1/2)t}{t}\,\mathrm{d}t + \\ + \frac{1}{\pi}\frac{\pi}{2}\int_\xi^\pi \frac{f(x+t)}{t}\sin(n+1/2)t\,\mathrm{d}t = I_1 + I_2.$$

$I_2 \rightrightarrows 0$ на основу Риман Лебегове Леме, јер је $|f(x+t)/t| \le M/\xi$, за $t \ge \xi$, а M/ξ је константа, дакле апсолутно и равномерно интеграбилна, док $I_1 \rightrightarrows \frac{1}{\pi}\frac{\pi}{2}f(x+) = f(x)/2$, према претходној леми.

На сличан начин и

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x-t)\frac{t/2}{\sin(t/2)}\frac{\sin(n+1/2)t}{t}\,\mathrm{d}t \rightrightarrows f(x)/2.$$

□

15.16. Фејерово језгро. Знамо да постоји непрекидна функција чији Фуријеов ред дивергира у неколиким тачкама (пример ди Буа Рејмона). И више, постоји и непрекидна функција чији Фуријеов ред конвергира у свакој тачки, али је та конвергенција неравномерна. Такав пример конструисао је Лебег 1906. У вежбањима 5 и 6 може се наћи нешто једноставнија конструкција, која потиче од Фејера.

С друге стране, низ се може „поправити“ узимањем аритметичких средина првих n чланова. То је тврђење познато из параграфа 2.30. Наиме, ако низ

$$\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \tag{15}$$

конвергира ка γ, онда и x_n конвергира ка γ. Да обратно није тачно, лако се види посматрајући $x_n = (-1)^n$.

Ако низ (15) конвергира онда кажемо да полазни низ x_n конвергира у Ћезаровом смислу. Од интереса је, дакле, проверити да ли Ћезарова конвергенција Фуријеовог реда доноси нешто више.

Ћезарове средине Фуријеовог реда функције f су

$$C_n(x;f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(x;f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)F_n(x-t)\,\mathrm{d}t, \tag{16}$$

где је

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(x)$$

Функцију $F_n(x)$ називамо *Фејерово језгро.* Експлицитан облик Фејеровог језгра добијамо на следећи начин

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\pi}\frac{\sin(k+1/2)x}{2\sin x/2} = \\ &= \frac{1}{2n\pi}\frac{1}{\sin^2 x/2}\sum_{k=0}^{n-1}\sin(k+\frac{1}{2})x\sin\frac{x}{2} = \\ &= \frac{1}{2n\pi\sin^2 x/2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\cos kx-\cos(k+1)x}{2} = \\ &= \frac{1}{2n\pi\sin^2 x/2}\frac{1-\cos nx}{2} = \frac{1}{2n\pi}\frac{\sin^2\frac{nx}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

15.17. Став. Фејерово језгро има следеће особине:

а) $F_n(x)\geq 0$;

б) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}F_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$;

в) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{\delta\leq|x|\leq\pi}F_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$, за све $\delta>0$.

Доказ. а) Очигледно;

б) Како је $\int_{-\pi}^{\pi}D_k(x)\,\mathrm{d}x = 1$, то је и

$$\int_{-\pi}^{\pi}F_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{-\pi}^{\pi}D_k(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

в) Ако је $\delta\leq|x|\leq\pi$ онда је $\frac{1}{\sin^2 x/2}\leq\frac{1}{\sin^2\delta/2}$, па је

$$0\leq F_n(x) = \frac{1}{2n\pi}\frac{\sin^2 nx/2}{\sin^2 x/2}\leq\frac{1}{2n\pi\sin^2\delta/2}\rightrightarrows 0,\quad \text{равномерно по } x.$$

□

Кључна је особина а) - позитивност Фејеровог језгра. Она омогућава да се докаже да Ћезарове средине Фуријеовог реда равномерно конвергирају полазној функцији. Наравно под условом да је реч о непрекидној функцији.

15.18. Теорема [Фејер]. Нека је $f:[-\pi,\pi]\to\mathbf{R}$ непрекидна функција, таква да је $f(-\pi)=f(\pi)$. Тада Ћезарове средине C_n Фуријеовог реда равномерно конвергирају ка $f(x)$.

Доказ. Функција f се може продужити до 2π-периодичне функције f^* која је, због услова $f(-\pi)=f(\pi)$, такође непрекидна. Да не компликујемо запис и то продужење ћемо такође означавати са f. Из (16), после смене $t\leftrightarrow x-t$, имамо

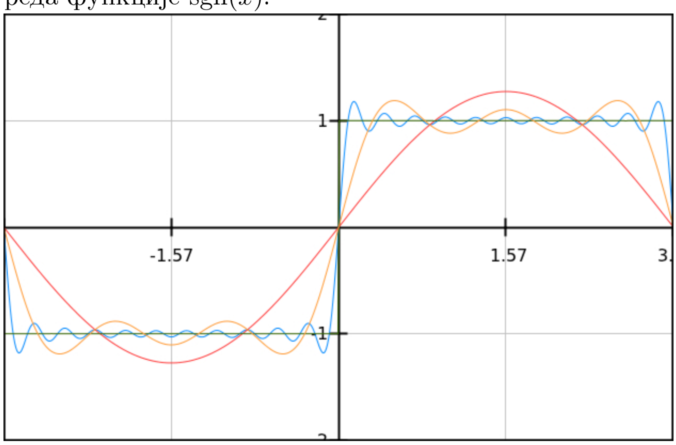
$$\begin{aligned} |C_n(x)-f(x)| &= \left|\int_{-\pi}^{\pi}(f(x-t)-f(x))F_n(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \\ &\leq \int_{|t|\leq\delta}|f(x-t)-f(x)|F_n(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\delta\leq|t|\leq\pi}2MF_n(t)\,\mathrm{d}t = S_1+S_2, \end{aligned}$$

где је M ограничење функције f. Први сабирак се може учинити мањим од ε, јер је f непрекидна на затвореном интервалу, и тиме равномерно непрекидна (Канторова теорема), па постоји $\delta > 0$, такво да из $|x-y| < \delta$ следи $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Управо за такво δ, биће $|f(x-t) - f(x)| < \varepsilon$, кад $|t| < \delta$. Други сабирак, према претходном ставу тежи ка нули, и при томе не зависи од x. □

15.19. Запажања. 1° Динијеви и Дирихле-Жорданови услови су неупоредиви. На пример, функција $x^2 \sin \frac{1}{x^2}$ није ограничене варијације па не задовољава Дирихле-Жорданов услов, али је диференцијабилна, и стога задовољава Динијев услов. С друге стране, функција $f(x) = \frac{1}{\log|x|}$ је монотона, али је $\int \frac{f(0+x)}{x}$ дивергентан интеграл.

2° Кључна чињеница у доказу Фејерове теореме је позитивност Фејеровог језгра, односно $\int F_n = \int |F_n| = 1$. Дирихлеово језгро нема ту особину. Штавише, може се показати да је $\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x)| \, \mathrm{d}x \sim C \log n$, кад $n \to +\infty$. Неравномерна ограниченост интеграла апсолутне вредности Дирихлеовог језгра извор је свих проблема. Развојем функционалне анализе, тачније применом Банах-Штајнхаусовог става, могуће је на једноставан начин доказати егзистенцију функција које су конструисали ди Буа Рејмон и Лебег.

3° У околини тачака прекида функције f конвергенција Фуријеовог реда мора бити неравномерна, што значи да се за дату тачност ε мора узимати све више и више сабирака. Овај податак се у инжињерском свету назива *Гибсов феномен*. На слици 8, приказани су графици делимичних сума S_1, S_5 и S_{21}, Фуријеовог реда функције $\operatorname{sgn}(x)$.



Слика 8

Иначе, Гибсов феномен се може срести у свакодневном животу. Ма какав тон, звук, који се преноси каблом, јесте периодична функција (напон се изражава у функцији од времена). Основни период (инжињери кажу таласна дужина) одређује висину тона. Чешће се она изражава у терминима учесталости (или фреквенције) - реципрочна вредност таласне дужине. Што виша учесталост то виши тон. Сви каблови, укључујући и дигиталне, имају свој фреквентни опсег. Због појаве која се зове индуктивност, каблови не пропуштају функције чија је фреквенција већа од неке фиксиране и која зависи од техничких карактеристика. У пракси то значи да се периодични сигнал, након проласка кроз кабл претвара у делимичну суму S_n свог Фуријеовог реда, при чему је број n одређен квалитетом кабла. Уколико на улазу дође до наглих скокова напона, на пример, ако загребете ноктом по микрофону, онда је улазна функција блиска прекидној, па на излазу, због неравномерне конвергенције добијамо рђаву апроксимацију. Наш саговорник ће поред гребања чути и благо крчање. Оно се може чути и на телевизору, радиу и било где другде. Осим крчања, промене у боји тона су такође присутне. Дигитална телефонија преноси тзв. одбирке, тј. уместо функције преноси њену вредност у чворовима. Густина чворова је подешена тако да одговара фреквентном опсегу говора, који није нарочито велики. Отуда се добија апроксимација која је довољно добра да разумемо саговорника, али довољно лоша, да сви кажемо „друкчије звучиш преко телефона“. Исто важи и за претерано компримоване mp3 фајлове.

ОПЕРАЦИЈЕ СА ФУРИЈЕОВИМ РЕДОВИМА

Раније су доказане теореме о диференцирању и интеграцији редова члан по члан, који се ослањају на равномерну конвергенцију. Фуријеови редови, нажалост, равномерно конвергирају под веома јаким условима. Међутим, интеграција и диференцирање Фуријеових редова може се оправдати и другим методима, без обзира на равномерну конвергенцију.

15.20. Став [диференцирање]. Нека је $f : [-\pi, \pi] \to \mathbf{R}$ диференцијабилна функција и нека је $f(-\pi) = f(\pi)$.

а) Ако $f(x) \sim \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, онда је

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty}(nb_n \cos nx - na_n \sin nx). \tag{17}$$

б) Ако f' испуњава неки од услова из теорема 15.9 или 15.11, онда у (17) важи једнакост.

Доказ. Имамо

$$a_0(f') = \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\,\mathrm{d}x = f(\pi) - f(-\pi) = 0,$$

$$a_n(f') = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}f(x) =$$
$$= \frac{1}{\pi} f(x)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(-n\sin nx)\,\mathrm{d}x = nb_n(f),$$

а такође и

$$b_n(f') = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}f(x) =$$
$$= \frac{1}{\pi} f(x)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)n\cos nx)\,\mathrm{d}x = -na_n(f).$$

Примедба: Међучлан у парцијалној интеграцији у првом извођењу анулира се због $f(-\pi) = f(\pi)$.

б) Следи из Теорема 15.9 и 15.11 □

15.21. Став [интеграција]. Нека је $f : [-\pi, \pi] \to \mathbf{R}$ апсолутно интеграбилна функција,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

при чему није битно да ли њен Фуријеов ред конвергира или не. Тада за све $\alpha, \beta \in [-\pi, \pi]$ важи

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta \frac{a_0}{2}\,\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{+\infty} \int_\alpha^\beta (a_k \cos x + b_k \sin kx)\,\mathrm{d}x. \tag{18}$$

Доказ. Посматрајмо функцију $F(x) = \int_0^x (f(t) - a_0/2)\,\mathrm{d}t$, која се разликује од интеграла функције f за $a_0 x/2$. Коефицијент $a_0/2$ смо додали у интеграл да би F била периодична; наиме, тада је $F(\pi) - F(-\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t - 2\pi a_0/2 = 0$.

Нека су A_n, B_n Фуријеови коефицијенти функције F. Тада имамо

$$\begin{aligned}
\pi A_n &= \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n} F(x) \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nx}{n}\,\mathrm{d}F(x) = \\
&= -\frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \Big(f(x) - \frac{a_0}{2}\Big) \sin nx\,\mathrm{d}x = \\
&= -\frac{1}{n}\pi b_n + \frac{a_0}{2n} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n}\pi b_n
\end{aligned}$$

и слично

$$\begin{aligned}
\pi B_n &= \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \sin nx\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n} F(x) \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos nx}{n}\,\mathrm{d}F(x) = \\
&= \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \Big(f(x) - \frac{a_0}{2}\Big) \cos nx\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{\pi}{n} a_n(f) - \frac{a_0}{2n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{n} a_n(f).
\end{aligned}$$

Међучлан у парцијалној интеграцији у другом извођењу анулира се због једнакости $F(-\pi) = F(\pi)$. Тако имамо

$$F(x) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(-\frac{b_k}{k} \cos kx + \frac{a_k}{k} \sin kx \right), \tag{19}$$

при чему још једино нисмо израчунали A_0. У ту сврху, уврстимо $x = 0$ у последњу формулу, па како је $F(0) = 0$ налазимо

$$\frac{A_0}{2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k}{k}. \tag{20}$$

Докажимо још да у (19) важи знак једнакости. Функција F има ограничену варијацију, јер је

$$\sum |F(x_k) - F(x_{k-1})| \le \sum \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(t) - a_0/2|\,\mathrm{d}t \le \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - a_0/2|\,\mathrm{d}t,$$

па можемо применити Жордан-Дирихлеов критеријум. Тако комбинујући (19) и (20) налазимо

$$F(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{b_k}{k}+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(-\frac{b_k}{k}\cos kx+\frac{a_k}{k}\sin kx\right),$$

односно

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-\frac{a_0}{2}x=\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{b_k}{k}(1-\cos kx)+\frac{a_k}{k}\sin kx\right),$$

а то је управо формула (18) у посебном случају $\alpha=0$. Општу добијамо, одузимањем $\int_\alpha^\beta=\int_0^\beta-\int_0^\alpha$. □

Примедба: У доказу смо користили теорему о парцијалној интеграцији за Стилтјесов интеграл, и његово свођење на Риманов. Обична теорема о парцијалној интеграцији није довољна јер претпоставља непрекидност функције f. Доказ се може извести и без позивања на Стилтјесов интеграл, као што је то уобичајено у старијим уџбеницима, и то путем Фубинијеве теореме.

ФУРИЈЕОВИ РЕДОВИ У УНИТАРНИМ ПРОСТОРИМА

15.22. Једноставност формула (6) за израчунавање Фуријеових коефицијената, долази од особина (3) да се интеграли производа две функције из скупа $\mathcal{B}=\{1,\cos x,\sin x,\dots\}$ анулирају.

То наводи на помисао да се један део приче о Фуријеовим редовима може пренети и на друге системе функција које имају исту особину. Више од тога, концепт Фуријеових редова, може се апстрактно засновати. Наиме, интеграл производа $\int f\cdot g$ има особине скаларног производа, појма познатог из линеарне алгебре. Стога ћемо у овом одељку развити теорију Фуријеових редова у апстрактном окружењу. Наравно само у најосновнијем обиму.

15.23. Дефиниција [Унитарни простори]. Пре свега, даћемо дефиницију *унитарног* или *предхилбертовог* простора.

Векторски простор X (над пољем $\mathbf{C}$) је унитаран ако на њему постоји функција $\langle\cdot,\cdot\rangle: X\times X\to\mathbf{C}$, са следећим особинама:

1° $\langle x,x\rangle\ge 0$ и $\langle x,x\rangle=0$ ако и само ако је $x=0$ (самим тим $\langle x,x\rangle$ је увек реално);

2° $\langle y,x\rangle=\overline{\langle x,y\rangle}$;

3° $\langle\lambda_1x_1+\lambda_2x_2,y\rangle=\lambda_1\langle x_1,y\rangle+\lambda_2\langle x_2,y\rangle$ (λ_1, λ_2 комлексни бројеви.

Из ових особина једноставно се изводи да је $\langle x,\mu_1y_1+\mu_2y_2\rangle=\overline{\mu_1}\langle x,y_1\rangle+\overline{\mu_2}\langle x,y_2\rangle$, као и $\langle 0,x\rangle=\langle x,0\rangle=0$.

У сваком унитарном простору, пресликавање $X\ni x\mapsto||x||=\sqrt{\langle x,x\rangle}$ је коректно дефинисано и има особине норме. Тако је сваки унитаран простор уједно и нормиран векторски простор. Обратно није тачно јер постоје нормирани векторски простори, где норма није уведена преко скаларног производа нити је могуће увести је тако (види вежбање 8). Помоћу норме могуће је дефинисати метрику, као што смо видели раније, са $d(x,y)=||x-y||$, па је сваки унитаран простор метрички простор. Ако је још комплетан, онда га зовемо *Хилбертов простор.*

Основну предност у раду са унитарним просторима у односу на нормиране векторске просторе даје појам ортогоналности вектора. Наиме кажемо да је $x \perp y$ (x ортогонално на y) ако је $\langle x, y \rangle$. Јасно је да је нула вектор ортогоналан на сваки други вектор.

У следећем ставу изложићемо најосновнија својства скаларног производа.

15.24. Став. У сваком унитарном простору важи

а) $||x+y||^2 = ||x||^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y \rangle + ||y||^2$;

б) $|\langle x, y \rangle| \le ||x||\,||y||$ (Коши-Шварцова неједнакост);

в) ако су $x_1, \ldots, x_n$ међусобно ортогонални вектори, онда је

$$||x_1 + \cdots + x_n||^2 = ||x_1||^2 + \cdots + ||x_n||^2 \quad \text{(Питагорина теорема)};$$

г) Ако $x_n \to x$ онда $\langle x_n, y \rangle \to \langle x, y \rangle$ (непрекидност скаларног производа.

Доказ. а) Из дефиниције је

$$\begin{aligned} ||x+y||^2 &= \langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle = \\ &= ||x||^2 + \langle x, y \rangle + \overline{\langle y, x \rangle} + ||y||^2 = ||x||^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y \rangle + ||y||^2; \end{aligned}$$

б) Ако је један од вектора x, y једнак нули, неједнакост је тривијална. Зато претпоставимо $x, y \neq 0$. За ма који скалар λ, због а) важи

$$0 \le ||x + \lambda y||^2 = ||x||^2 + 2\operatorname{Re}\bar{\lambda}\langle x, y \rangle + |\lambda|^2 ||y||^2.$$

Наместимо згодно λ, то јест $\lambda = -\langle y, x \rangle / ||y||^2$, па добијамо

$$0 \le ||x||^2 - 2\frac{|\langle x, y \rangle|^2}{||y||^2} + \frac{|\langle x, y \rangle|^2 ||y||^2}{||y||^4} = ||x||^2 - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{||y||^2},$$

одакле следи резултат;

в) Ако су x и y ортогонални, онда је $\langle x, y \rangle = 0$, па резултат, у случају $n = 2$, следи из тачке а). Општи случај помоћу индукције;

г) $x_n \to x$ у ствари значи $||x_n - x|| \to 0$. На основу Коши-Шварцове неједнакости имамо $|\langle x_n, y \rangle - \langle x, y \rangle| = |\langle x_n - x, y \rangle| \le ||x_n - x||\,||y|| \to 0$. $\square$

Примедба: Поље скалара се, безболно може заменити са $\mathbf{R}$, с тим што у особини 2°, треба игнорисати комплексно конјуговање. Тада Коши-Шварцова неједнакост омогућава дефиницију угла између два вектора, јер количник $\langle x, y \rangle / ||x||\,||y|| \in [-1, 1]$, па се може прогласити за косинус неког угла из $[0, \pi]$. Но, то нам неће бити потребно.

15.25. Дефиниција. Нека је X унитаран простор и нека је дат систем функција $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_k, \ldots\} \subseteq X$.

а) Кажемо да је $\mathcal{B}$ *ортогоналан систем*, ако за $j \neq k$ важи $e_j \perp e_k$, тј. $\langle e_j, e_k \rangle = 0$;

б) Кажемо да је $\mathcal{B}$ *ортонормиран систем*, ако је ортогоналан и за све k важи $||e_k|| = 1$;

в) Нека је $x \in X$, и $\mathcal{B}$ ортогоналан систем. Бројеве $\langle x, e_k \rangle / ||e_k||^2$ називамо *Фуријеовим коефицијентима* вектора x у односу на систем $\mathcal{B}$. Те коефицијенте означаваћемо са $\alpha_k(x)$ или само α_k ако нема опасности од забуне.

Надаље ћемо радити са ортогоналним системима, уз напомену да формуле попримају једноставнији облик ако је систем још и ортонормиран.

15.26. Став. Нека је X унитаран простор са скаларним производом $\langle \cdot, \cdot \rangle$, и нека је e_j $j = 1, 2, \ldots$ неки ортогоналан систем у X и нека су α_k његови Фуријеови коефицијенти. Тада важи:

а) Ако су β_k било какви комплексни бројеви, тада је

$$||x - \sum_{k=1}^{n} \beta_k e_k|| \geq ||x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k||. \tag{21}$$

Другим речима n-та делимична сума Фуријеовог реда S_n, је од свих линеарних комбинација функција из скупа $\{e_1, \ldots, e_n\}$ најближа функцији f (у метрици простора X). (Екстремално својство Фуријеових коефицијената.)

б) $\sum\limits_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 ||e_k||^2 \leq ||x||^2$ - Беселова неједнакост;

в) Ред $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} |\alpha_k|^2 ||e_k||^2$ конвергира, и посебно, низ $\alpha_k ||e_k||$ тежи ка нули.

Доказ. а) Нека је $S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$. Тада за $m \leq n$ важи

$$\langle x - S_n, e_m \rangle = \langle x, e_m \rangle - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \langle e_k, e_m \rangle = \alpha_m ||e_m||^2 - \alpha_m ||e_m||^2 = 0, \tag{22}$$

јер је за $k \neq m$, $\langle e_k, e_m \rangle = 0$.

Отуда, ако је $T_n = \sum_{k=1}^{n} \beta_k e_k$, онда је $S_n - T_n$ линеарна комбинација вектора $e_1, \ldots, e_n$, па је ортогонална на $x - S_n$. Тако, због Питагорине теореме имамо

$$||x - T_n||^2 = ||(x - S_n) + (S_n - T_n)||^2 = ||x - S_n||^2 + ||S_n - T_n||^2 \geq ||x - S_n||^2;$$

б) Из (22) имамо $\langle x - S_n, S_n \rangle = 0$, па је

$$||x - S_n||^2 = \langle x - S_n, x - S_n \rangle = \langle x - S_n, x \rangle = ||x||^2 - \langle S_n, x \rangle$$

а такође и

$$\langle S_n, x \rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \langle e_k, x \rangle = \sum_{k=1}^{n} \frac{|\langle x, e_k \rangle|^2}{||e_k||^2} = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 ||e_k||^2,$$

одакле следи

$$0 \leq ||x - S_n||^2 = ||x||^2 - \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 ||e_k||^2; \tag{23}$$

в) Следи из б). □

Геометријским језиком, претходни резултати се могу формулисати и тако што је S_n ортогонална пројекција вектора x на потпростор разапет векторима $e_1, \ldots, e_n$. Логично је, онда, рећи да је сума Фуријеовог реда (ако постоји) ортогонална пројекција на потпростор генерисан свим векторима e_j, $j \geq 1$. Поставља се природно питање: Да ли је тај потпростор једнак целом X или постоје неке функције које ту нису? Одговор зависи од ортогоналног система и окарактерисан је следећим тврђењем:

15.27. Теорема. Нека је X унитаран простор, e_j, $j \geq 1$ неки ортогоналан систем.

а) Следећи услови су међусобно еквивалентни:

(i) Скуп свих линеарних комбинација вектора e_j је свуда густ у x.

(ii) За свако $x \in X$, ред $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \alpha_k e_k$ конвергира ка x у норми простора X, то јест

$$||x - S_n|| = ||x - \sum_{k=1}^{n} \frac{\langle x, e_k\rangle}{||e_k||^2} e_k|| \to 0;$$

(iii) Важи

$$||x||^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} |\alpha_k|^2 ||e_k||^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|\langle x, e_k\rangle|^2}{||e_k||^2} \quad \text{(Парсевалова једнакост);}$$

(iv) За свако $x, y \in X$ важи $\langle S_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$;

б) Сваки од претходних услова повлачи

(v) За све $x \in X$, из $\langle x, e_k\rangle = 0$ за све $k \geq 1$ следи $x = 0$,

а ако је X комплетан, онда важи и обратна импликација.

Доказ. а) (ii) $\Rightarrow$ (i) је очигледно;

(i) $\Rightarrow$ (ii) Нека је $\varepsilon > 0$ дато. Тада постоји коначна линеарна комбинација $T_{n_0} = \sum_{k=1}^{n_0} \beta_k e_k$ базних вектора, таква да је $||x - T_{n_0}|| < \varepsilon$. Због екстремалног својства Фуријеових коефицијената (21), онда је и $||x - S_{n_0}|| < \varepsilon$, а како је низ $||x - S_n||$ (због (23)) опадајући, то следи резултат;

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) следи из формуле (23);

(ii) $\Rightarrow$ (iv) Непосредно следи из непрекидности скаларног производа;

(iv) $\Rightarrow$ (ii) Из (22) имамо $\langle x - S_n, S_n\rangle = 0$, па је $||x - S_n||^2 = \langle x - S_n, x\rangle \to 0$, применом услова ($iii$) на $y = x$;

б) (iii) $\Rightarrow$ (v) Ако је $\langle x, e_k\rangle = 0$, онда је на основу ($ii$), $||x||^2 = 0$, тј. $x = 0$;

(v) $\Rightarrow$ (ii) Сада претпостављамо да је X комплетан. Прво докажимо да ред $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \alpha_k e_k$ конвергира. Имамо, на основу ортогоналности

$$\left\langle \sum_{k=n+1}^{m} \alpha_k e_k, \sum_{k=n+1}^{m} \alpha_k e_k \right\rangle = \sum_{k=n+1}^{m} |\alpha_k|^2 ||e_k||^2 < \varepsilon,$$

за довољно велике m, n, јер је последњи израз остатак конвергентног реда. Стога је низ делимичнох сума нашег реда Кошијев, па је и конвергентан, јер је X комплетан.

Уочимо вектор

$$y = x - \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k e_k.$$

Због ортогоналности система e_k и непрекидности скаларног проивода, за све m имамо

$$\langle y, e_m\rangle = \langle x, e_m\rangle - \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k \langle e_k, e_m\rangle = \langle x, e_m\rangle - \alpha_m ||e_m||^2 = 0.$$

Отуда је $y = 0$, односно важи (ii). □

ПОТПУНОСТ ТРИГОНОМЕТРИЈСКОГ СИСТЕМА

Закључци претходног одељка важе у општем случају. У овом одељку применићемо их на тригонометријске Фуријеове редове.

15.28. Дефиниција. Дефинишемо скуп

$$\mathcal{R}^2[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbf{C} \mid |f(x)|^2 \text{ интеграбилна}\},$$

и скаларни производ $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{R}^2[a,b] \times \mathcal{R}^2[a,b]$ са

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x. \tag{24}$$

Особине 2° и 3° скаларног производа се једноставно проверавају. Међутим, постоји проблем, додуше отклоњив, у томе што особина 1° скаларног производа није испуњена. Наиме, може бити да је $\int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = 0$, а да при томе f не буде идентички једнака нули. На пример, функција која се разликује од нуле у коначно много тачака. То за последицу има то да пресликавање d, дато са $d(f,g) = ||f-g|| = \sqrt{\langle f-g, f-g\rangle}$ није метрика већ псеудометрика. Као и у случају псеудометричких простора, овај проблем се решава преласком на количнички скуп који се добија када се основни посече по згодно одабраној релацији еквиваленције.

Кажемо да су f и g еквивалентне и пишемо $f \sim g$, ако је $\int_a^b |f(x) - g(x)|^2\,\mathrm{d}x = 0$. Сасвим је једноставно доказати да је $\sim$ једна релација еквиваленције. Није тешко ни извести да се та релација слаже са операцијама сабирања вектора, множења вектора скаларом и скаларног множења, односно да важи:

$$f \sim f_1 \,\wedge\, g \sim g_1 \Rightarrow f + g \sim f_1 + g_1,\, \lambda f \sim \lambda f_1,\, \langle f, g\rangle = \langle f_1, g_1\rangle\,,$$

што омогућује да се на количничком скупу

$$R^2[a,b] := \mathcal{R}^2[a,b]/\sim$$

на коректан начин уведу операције $+$, $\cdot$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle$, односно структура унитарног простора.

Остаје још да се провери да је интеграл у (24) увек конвергентан. Сигурно је све у реду ако уместо скупа $\mathcal{R}[a,b]$ посматрамо његов подскуп (заправо векторски потпростор) који се састоји искључиво од ограничених функција. Тада ће нас Коши-Шварцова неједнакост примењена на функције $|f|$ и $|g|$ уверити да је $\int |fg| \le \sqrt{\int |f|^2 \int |g|^2}$, и то на ма ком интервалу. И сада је проблем решен, јер је десна страна последње неједнакости ограничена, онда када $f, g \in \mathcal{R}^2[a,b]$.

Елементи скупа R^2 су, дакако, класе еквивалентних функција и требало би да их означавамо са $[f]$. Међутим, ми ћемо и поред тога писати просто f, уместо $[f]$, јер у нашем случају један представник класе говори све о целој класи.

Конвергенцију у метричком простору $R^2[a,b]$ називамо *средње квадратна* конвергенција. Дакле низ f_n средње квадратно конвергира ка f ако и само ако $\int_a^b |f_n - f|^2 \to 0$.

15.29. Став. Нека су дате функције $s_n(x) = \sin nx$, $c_n(x) = \cos nx$, $c_0(x) \equiv 1/\sqrt{2}$. Систем функција $\mathcal{B} = \{1, c_1, s_1, \dots, c_n, s_n, \dots\}$ је ортогоналан систем у простору $R^2[-\pi, \pi]$. И више норма сваке функције из тог скупа једнака је $\sqrt{\pi}$.

Доказ. Заиста, релације (6) се могу записати као

$$\langle c_m, c_n\rangle = \begin{cases} \pi, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases} \quad \langle s_m, s_n\rangle = \begin{cases} \pi, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases} \quad \langle c_m, s_n\rangle = 0,$$

што је довољно за доказ. □

15.30. Став. Нека $f \in R^2[-\pi, \pi]$ и $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$.

а) Важе једнакости $a_0 = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \langle f, c_0\rangle$, $a_k = \frac{1}{\pi} \langle f, c_k\rangle$, $b_k = \frac{1}{\pi} \langle f, s_k\rangle$;

б) Ако су c_k и d_k било какви комплексни бројеви, тада је

$$||f - (c_0 + \sum_{k=1}^{n}(c_k \cos kx + d_k \sin kx)|| \geq ||f - (a_0/2 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx)||.$$

Другим речима n-та делимична сума Фуријеовог реда S_n, је од свих линеарних комбинација функција из скупа $\mathcal{B}$ најближа функцији f (у средње квадратној метрици).

в) $|a_0|^2/2 + \sum\limits_{k=1}^{n} (|a_k|^2 + |b_k|^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x$ - Беселова неједнакост;

г) Ред $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2)$ конвергира, и посебно, низови a_k, b_k теже ка нули.

Доказ. Применимо Став 15.26 на ортогоналан систем $\{c_n, s_m \mid n \geq 1, m \geq 0\}$ описан у претходном Ставу. □

Као и у општем случају, претходни резултати се могу геометријски тумачити тако што је S_n ортогонална пројекција функције f на потпростор разапет функцијама $c_0, c_1, s_1, \dots, c_n, s_n$.

15.31. Теорема [потпуност тригонометријског система]. Нека је $f \in \mathcal{R}^2[-\pi, \pi]$ и $f \sim a_0/2 + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$.

а) Скуп свих тригонометријских полинома, односно коначних линеарних комбинација функција из $\mathcal{B}$ је свуда густ у $R^2[-\pi, \pi]$;

б) $S_n(x; f)$ конвергира средње квадратно ка f, то јест $||f - S_n|| \to 0$;

в) Важи

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|^2 + |b_k|^2 \quad \text{(Парсевалова једнакост)};$$

г) Ако је $g \in \mathcal{R}^2[-\pi, \pi]$, онда $\int_{-\pi}^{\pi} S_n(x)\overline{g(x)} \,\mathrm{d}x \to \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)} \,\mathrm{d}x$;

д) Ако је $g \in \mathcal{R}^2[-\pi, \pi]$ и $\int g = \int g \cos kx = \int g \sin kx = 0$, онда је $\int |g|^2 = 0$, односно g је нула вектор у количничком простору R^2.

Доказ. а) 1°-*корак.* Пре свега докажимо да равномерна конвергенција непрекидних функција повлачи средњеквадратну. За непрекидну функцију f

имамо:

$$||f|| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x} \le \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \left(\max_{-\pi\le t\le\pi} |f(t)|\right)^2 \mathrm{d}x} = \sqrt{2\pi} \max_{-\pi\le t\le\pi} |f(t)|.$$

Ако низ непрекидних функција f_n равномерно конвергира ка f, онда

$$\max_{-\pi\le t\le\pi} |f_n(t) - f(t)| \to 0,$$

па, према претходној неједнакости $||f_n - f|| \to 0$.

2° *корак.* За дату, квадратно интеграбилну функцију f и за произвољно $\varepsilon > 0$, постоји непрекидна функција f_0, таква да је $||f - f_0|| < \varepsilon$.

Заиста, ако је f ограничена онда f_0 добијамо као дао по део линеарну функцију спајајући тачке $(x_k, f(x_k))$ где су x_k подеоне тачке поделе $\mathcal{P}$, такве да је $\overline{S}(\mathcal{P}) - \underline{S}(\mathcal{P}) < \varepsilon^2/2M$, где је M горње ограничење функције $|f|$. Заиста, тада ће за ма које $t \in [x_{k-1}, x_k]$ бити

$$|f(t) - f_0(t)|^2 \le 2M|f(t) - f_0(t)| \le 2M,$$

односно

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(t) - f_0(t)|^2 \le 2M\Omega_{[x_{k-1},x_k]} f \cdot (x_k - x_{k-1}),$$

што када просумирамо постаје $||f - f_0||^2 \le 2M(\overline{S} - \underline{S}) < \varepsilon^2$.

Ако је f квадратно интеграбилна у несвојственом смислу са несвојственим тачкама $c_1, \dots c_n$, тада постоје довољне мале околине U_j тачака c_j, такве да је $\sum \int_{U_j} |f|^2 < \varepsilon^2/4$. Ако је $\hat{f} = f$ ван скупова U_j, а на U_j једнака нули, онда је $\hat{f}$ ограничена и $||f - \hat{f}|| \le \varepsilon/2$. Претходни случај применимо на функцију $\hat{f}$.

Последњи корак. Према Фејеровој теореми, постоји низ тригонометријских полинома $T_n(x)$ степена тачно n, такав да $T_n \rightrightarrows f_0$. Тада, према првом кораку, и $||T_n - f_0|| \to 0$, па је за довољно велико n Отуда

$$||T_n - f|| \le ||T_n - f_0|| + ||f_0 - f|| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon;$$

б)-д) Све остале тачке следе из а) и Става 15.27 $\square$

15.32. Запажања. 1° Тригонометријски ред се лепо, чак прелепо понаша у односу на средње квадратну конвергенцију, дакле увек конвергира полазној функцији. Што се тиче обичне (тачка по тачка) и равномерне конвергенције, како смо видели, тригонометријски Фуријеов ред се опире сваком лепом закључку. Доказали смо да равномерна конвергенција повлачи и обичну и средње квадратну, а да обична не повлачи равномерну. У вежбању 10 дата је скица доказа да су средње квадратна и обична конвергенција неупоредиве, то јест да ниједна од њих не повлачи ону другу. Тиме, јасно, из средње квадратне не следи равномерна.

2° Може се доказати (а за то видети вежбање 28), да простор $R^2[-\pi,\pi] = \mathcal{R}^2[-\pi,\pi]/\sim$ није комплетан метрички простор, што у даљим разматрањима може да направи проблеме. Као што је познато, он се може допунити до комплетног метричког простора. Међутим то проширење је скуп класа међусобно еквивалентних Кошијевих низова у R^2, дакле објеката са којима није пријатно радити. Много би лепше било да се R^2 некако утопи у комплетан метрички простор чији су елементи функције. Таква потреба може бити остварена уколико се уместо Римановог узме Лебегов интеграл, али то већ излази из оквира класичне анализе.

3° Опште резултате применили смо само у једном случају - на конкретан унитаран простор $R^2[-\pi,\pi]$, и конкретан ортогоналан систем функција. Примери друкчијих унитарних простора, односно скаларних производа добијају се употребом тзв. тежинске функције. Наиме, ако је $w:[a,b]\to\mathbf{R}$ позитивна функција ($w(x)\geq 0$), онда је скаларни производ

$$\langle f,g\rangle=\int_a^b f(x)\overline{g(x)}w(x)\,\mathrm{d}x,$$

коректно дефинисан на простору

$$\mathcal{R}^2([a,b],w)=\{f:[a,b]\to\mathbf{R}\mid\int_a^b|f(x)|^2w(x)\,\mathrm{d}x\text{ конвергира}\},$$

уз неизбежно сечење по релацији еквиваленције.

О свему овоме видети више у вежбањима 29, 30, 31.

ФУРИЈЕОВ ИНТЕГРАЛ

15.33. Фуријеов ред има смисла ако је f периодична функција, или пак дефинисана на коначном сегменту $[-\pi,\pi]$. Иста прича може се спричати и када се интервал $[-\pi,\pi]$ замени интервалом $[-l,l]$ (или ма којим другим коначним интервалом), као што је то описано у параграфу 15.6. Међутим, проблем настаје ако желимо да развијемо у Фуријеов ред неку непериодичну функцију на читавом домену, то јест на $\mathbf{R}$.

Идеја је да превазиђемо проблем тако што ћемо функцију развити у Фуријеов ред на $[-l,l]$, а затим повећавати l, односно пустити лимес кад $l\to+\infty$. Фуријеов ред непериодичне функције на интервалу $[-l,l]$ је дат формулама (10) и (11) параграфа 15.6, па после мало рачуна добијамо

$$f(x)\sim\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)\,\mathrm{d}t+\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{k\pi(x-t)}{l}\,\mathrm{d}t=$$
$$=\int_{-l}^{l}f(t)\left(\frac12+\sum_{k=1}^{\infty}\cos\frac{k\pi(x-t)}{l}\right)\frac1l\,\mathrm{d}t$$

Подинтегрална функција, на неки начин, личи на интегралну суму. Наиме, ако узмемо подеоне тачке $\lambda_k=k\pi/l$, онда је $\lambda_k-\lambda_{k-1}=\pi/l$, а у подинтегралној функцији уочавамо вредност функције $g(\lambda)=\cos\lambda(x-t)$, односно

$$f(x)\sim\int_{-l}^{l}f(t)\left(\frac{g(\lambda_0)}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}g(\lambda_k)\right)\frac{\lambda_k-\lambda_{k-1}}{\pi}\,\mathrm{d}t.$$

Када $l\to+\infty$, последњи израз (тако очекујемо) приближно ће бити једнак

$$\frac1\pi\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)A(x-t)\,\mathrm{d}t,\quad\text{где је }A(x)=\int_0^{+\infty}\cos\lambda x\,\mathrm{d}\lambda.$$

Даљим расписивањем адиционе формуле налазимо да је

$$A(x-t)=\int_0^{+\infty} f(t)\cos\lambda x\cos\lambda t\,\mathrm{d}\lambda+\int_0^{+\infty} f(t)\sin\lambda x\sin\lambda t\,\mathrm{d}\lambda.$$

Тако има смисла следећа дефиниција

15.34. Дефиниција. Нека је $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ апсолутно интеграбилна (на $(-\infty,+\infty)$) функција. Њен Фуријеов интеграл је

$$f(x)\sim\int_0^{+\infty}[a(\lambda)\cos\lambda x+b(\lambda)\sin\lambda x]\,\mathrm{d}\lambda,$$

где је

$$a(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda t\,\mathrm{d}t,\quad b(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda t\,\mathrm{d}t. \tag{25}$$

15.35. Став [Динијев критеријум]. Нека је f апсолутно интеграбилна на $(-\infty,+\infty)$ функција.

а) Ако конвергира интеграл

$$\int_0^{+\infty}\frac{|f(x+\theta)+f(x-\theta)-f(x+)-f(x-)|}{\theta}\,\mathrm{d}\theta,$$

онда је

$$\int_0^{+\infty}[a(\lambda)\cos\lambda x+b(\lambda)\sin\lambda x]\,\mathrm{d}\lambda=\frac{f(x+)+f(x-)}{2}; \tag{26}$$

б) Ако f задовољава Липшицов услов у тачки x, онда важи (26);

в) Ако f има уопштене изводе у тачки x онда важи (26).

Доказ. а) Ако је $F_M(x)=(1/\pi)\int_0^M(a(\lambda)\cos\lambda x+b(\lambda)\sin\lambda x)\,\mathrm{d}\lambda$ „делимични интеграл“, онда користећи (25) имамо

$$\begin{aligned}\pi F_M(x)&=\int_0^M\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(x-t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\lambda=\\&=\int_0^M\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+\theta)\cos\lambda\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\lambda=\quad\text{(због апс. конв.)}\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^M f(x+\theta)\cos\lambda\theta\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\theta=\\&=\int_{-\infty}^{0}\int_0^M+\int_0^{+\infty}\int_0^M=\quad\text{(смена }\theta\leftrightarrow-\theta)\\&=\int_0^{+\infty}\int_0^M(f(x+\theta)+f(x-\theta))\cos\lambda\theta\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\theta=\\&=\int_0^{+\infty}(f(x+\theta)+f(x-\theta))\frac{\sin M\theta}{\theta}\,\mathrm{d}\theta.\end{aligned}\tag{27}$$

Отуда је, због $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin M\theta}{\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}$,

$$\text{(28)}\quad F_M(x) - \frac{f(x+)+f(x-)}{2} = \\ = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{f(x+\theta)+f(x-\theta)-f(x+)-f(x-)}{\theta}\sin M\theta\,\mathrm{d}\theta,$$

а последњи интеграл тежи ка нули на основу Риман Лебегове леме.

Примедба: Истина, Риман Лебегова лема је доказана за интеграл по коначном интервалу $[\alpha,\beta]$, али пажљивим проучавањем њеног доказа, можемо установити да важи и за $(0,+\infty)$. Заиста, због апсолутне интеграбилности $\int_\eta^{+\infty} < \varepsilon$, а $\int_0^\eta \to 0$ (техника коју смо користили у доказу РЛ Леме за случај несвојственог интеграла);

б) Због апсолутне интеграбилности функције f, интеграл

$$\int_\delta^{+\infty} \frac{|f(x+\theta)+f(x-\theta)-f(x+)-f(x-)|}{\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

је свакако конвергентан, а из Липшицовог услова у тачки x следи

$$|f(x+\theta)-f(x+)| \le L|\theta|^\alpha, \quad |f(x-\theta)-f(x-)| \le L|\theta|^\alpha,$$

па је конвергентан и $\int_0^\delta$, па следи Динијев услов;

в) Из егзистенције уопштених извода следи Липшицов услов уз $\alpha = 1$, што смо већ видели у Ставу 15.9. □

15.36. Став [Дирихле-Жорданов критеријум]. Ако је f апсолутно интеграбилна и ограничене варијације у некој околини тачке x, тада важи (26).

Доказ. Интеграл у (28) поделимо на два дела $\int_0^\delta + \int_\delta^{+\infty}$. Други интеграл тежи ка нули на основу Риман Лебегове леме. У првом раздвојимо подинтгралну функцију на два дела

$$\int_0^\delta = \int_0^\delta \frac{f(x+\theta)-f(x+)}{\theta}\sin M\theta\,\mathrm{d}\theta + \int_0^\delta \frac{f(x-\theta)-f(x-)}{\theta}\sin M\theta\,\mathrm{d}\theta = I_1 + I_2.$$

Применом друге теореме о средњој вредности налазимо

$$I_1 = \int_0^\delta \frac{f(x+\theta)-f(x+)}{\theta}\sin M\theta\,\mathrm{d}\theta = (f(x+\delta)-f(x+))\int_\xi^\delta \frac{\sin M\theta}{\theta}\,\mathrm{d}\theta \to 0,$$

јер је Дирихлеов интеграл конвергентан. Слично и за I_2. □

Ако се Фуријеов интеграл пребаци у комплексан облик добија се Фуријеова трансформација.

15.37. Дефиниција [Фуријеова трансформација]. Нека је $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ апсолутно интеграбилна функција (тј. $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t < +\infty$). Њена Фуријеова трансформација је функција $\hat{f}$ дата са

$$\text{(29)}\qquad \hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}\,\mathrm{d}\lambda.$$

Очигледно је реч о апсолутно конвергентном интегралу.

Узимајући у обзир формуле (25) налазимо да је

$$\hat{f}(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(a(\lambda) - ib(\lambda)).$$

15.38. Став [формула инверзије]. Нека је $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ апсолутно интеграбилна функција, која испуњава у свакој тачки било Динијеве, било Дирихле-Жорданове услове. Тада је

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{M \to +\infty} \int_{-M}^{+M} \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} \, \mathrm{d}\lambda. \tag{30}$$

Последње се може записати и као

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} \, \mathrm{d}\lambda,$$

али само под условом да интеграл конвергира, што не мора да буде тачно. Наиме, може се догодити да $\lim\limits_{M \to +\infty} \int_0^M$ и $\lim\limits_{M \to +\infty} \int_{-M}^0$ не постоје, али да услед скраћивања неког неинтеграбилног непарног сабирка у функцији f, постоји $\lim\limits_{M \to +\infty} \int_{-M}^M$.

Доказ. Фромулу инверзије доказаћемо само за случај функције са вредностима у $\mathbf{R}$. То је довољно, јер у противном можемо извршити разлагање $f = g + ih$, $g = \operatorname{Re} f$, $h = \operatorname{Im} f$. Функције g и h задовољавају исте услове (Дини, Дирихле-Жордан) као и f, а обе стране у формули (30) су линеарне. Дакле, претпоставимо да је $f(x) \in \mathbf{R}$ за све x.

Означимо са $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ Фуријеове коефицијенте функције f. Према претходна два Става, f се може представити преко свог Фуријеовог интеграла, па имамо

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{+\infty} [a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\sin\lambda x] \, \mathrm{d}\lambda = \\ &= \int_0^{+\infty} \operatorname{Re}(a(\lambda) - ib(\lambda)) e^{i\lambda x} \, \mathrm{d}\lambda = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left[(a(\lambda) - ib(\lambda)) e^{i\lambda x} \, \mathrm{d}\lambda + (a(\lambda) + ib(\lambda)) e^{-i\lambda x} \right] \mathrm{d}\lambda. \end{aligned}$$

У други интеграл уврстимо смену $\lambda \leftrightarrow -\lambda$, и искористимо чињеницу да је $a(\lambda)$ парна, а $b(\lambda)$ непарна функција, па добијамо

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \left[\int_0^{+\infty} (a(\lambda) - ib(\lambda)) e^{i\lambda x} \, \mathrm{d}\lambda - \int_0^{-\infty} (a(\lambda) - ib(\lambda)) e^{i\lambda x} \, \mathrm{d}\lambda \right] = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (a(\lambda) - ib(\lambda)) e^{i\lambda x} \, \mathrm{d}\lambda = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} \, \mathrm{d}\lambda, \end{aligned}$$

при чему је последњи интеграл добијен као $\lim\limits_{M \to +\infty} (\int_{-M}^0 + \int_0^M)$. □

15.39. Став. а) Нека је $f:\mathbf{R}\to\mathbf{C}$ n-пута диференцијабилна функција, таква да су f, f',... $f^{(n)}$ апсолутно интеграбилне функције. Тада је

$$\widehat{f^{(n)}}(\lambda)=(i\lambda)^n\hat{f}(\lambda);$$

б) Нека је $f:\mathbf{R}\to\mathbf{C}$ функција, таква да су $f(x)$ и $x^nf(x)$ апсолутно интеграбилне, и нека је $e(x)=x$. Тада је $\hat{f}$ n-пута диференцијабилна и важи

$$\widehat{e^nf}(\lambda)=i^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\lambda^n}\hat{f}(\lambda).$$

Доказ. а) Индукцијом по n. За $n=1$ постоје и $\hat{f}$ и $\hat{f}'$.

Покажимо, најпре да је $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=0$. Због $f(x)=f(0)+\int_0^xf'(t)\,\mathrm{d}t$ и интеграбилности функције f', наведени лимес постоји. Ако он није нула, већ рецимо $A>0$, онда је за $x>M$ $f(x)\ge A-\varepsilon$, па f није интеграбилна. Контрадикција

Сада изводимо тражену формулу парцијалном интеграцијом

$$\sqrt{2\pi}\widehat{f'}(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}f'(t)e^{-i\lambda t}\,\mathrm{d}t=$$
$$=f(t)e^{-i\lambda t}\Big|_{-\infty}^{+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)(-i\lambda)e^{-i\lambda t}\,\mathrm{d}t=i\lambda\sqrt{2\pi}\hat{f}(\lambda)$$

Корак $n\Rightarrow n+1$. Применимо претходни случај на функцију $f^{(n)}$, и добијамо

$$\widehat{f^{(n+1)}}(\lambda)=i\lambda\widehat{f^{(n)}}(\lambda)=i\lambda(i\lambda)^n\hat{f}(\lambda);$$

б) Исто индукцијом по n. За $n=1$ постоје $\hat{f}$ и $\widehat{ef}$, и резултат добијамо применом диференцирања параметарског интеграла (Став 14.13).

Корак $n-1\Rightarrow n$. Из неједнакости аритметичке и геометријске средине је $|x|^{n-1}=\sqrt[n]{1\cdot|x|^n\cdot\dots\cdot|x|^n}\le\frac{1+(n-1)|x|^n}{n}$, па је апсолутно конвергентан и интеграл функције $x^{n-1}f(x)$. Сада применимо претходни случај на функцију $x^{n-1}f(x)$. $\square$

15.40. Запажања. 1° Особина Фуријеове трансформације да извод претвара у множење независном промењивом изузетно је примењива у диференцијалним једначинама. О томе видети вежбања 32, 33.

2° Аналогон Парсевалове једнакости за Фуријеов интеграл је *Планшарелова* теорема, која тврди да је $\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{f}(\lambda)|^2\,\mathrm{d}\lambda=\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x$.

ВЕЖБАЊА

1. Ако f парна функција, доказати да је

$$b_n=0;\quad a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t;$$

а ако је непарна, онда је

$$a_n=0;\quad b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t.$$

2. Развојем функције $f(x)=x^2$ у Фуријеов ред доказати да је за $-\pi \le x \le \pi$,

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4\cdot(-1)^n}{n}\cos nx;$$

Доказати једнакости

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\frac{\pi^2}{12} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^2}{90}$$

3. а) Развојем функције $\cos ax$ ($|a|<1$), доказати да за $-\pi \le x \le \pi$ вреди

$$\frac{\cos ax}{\sin a\pi} - \frac{1}{a\pi} = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2a}{n^2-a^2}\cos nx;$$

б) Доказати да је $\log \dfrac{\sin a\pi}{a} = \log\left(C\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\dfrac{a^2}{n^2}\right)\right)$;

в) Извести Ојлерово разлагање синуса $\sin x = x\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\dfrac{x^2}{\pi^2 n^2}\right)$;

г) Израчунати збирове $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\alpha^2-n^2}$ и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^2-n^2}$ за $\alpha \notin \mathbf{Z}$.

4. Доказати једнакости

$$-\log\left(2\sin\frac{x}{2}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n}$$

$$\frac{\pi-x}{2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n}, \quad \text{за } -\pi<x<\pi.$$

5. Дати су следећи тригонометријски полиноми

$$C^{+}_{p,k}(x)=\sum_{j=1}^{k}\frac{\cos(p+j)x}{j}; \quad C^{-}_{p,k}(x)=\sum_{j=1}^{k}\frac{\cos(p-j)x}{j};$$

$$S^{+}_{p,k}(x)=\sum_{j=1}^{k}\frac{\sin(p+j)x}{j}; \quad S^{-}_{p,k}(x)=\sum_{j=1}^{k}\frac{\sin(p-j)x}{j}.$$

а) Доказати неједнакости

$$\left|C^{\pm}_{p,k}(x)\right|, \left|S^{\pm}_{p,k}(x)\right| \le \frac{1}{\sin(\varepsilon/2)};$$

б) Доказати да је $C^{-}_{m+n,n}(0) > \log n$ и $S^{-}_{m+n,n}(\pi/(m+n)) > \log n - 1$.

6. Нека је

$$P_{m,n}(x)=C^{-}_{m+n,n}(x)-C^{+}_{m+n,n}(x)$$
$$Q_{m,n}(x)=S^{-}_{m+n,n}(x)-S^{+}_{m+n,n}(x),$$

где су $C^{\pm}$, $S^{\pm}$ тригонометријски полиноми из претходног задатка.

а) Доказати да постоји (апсолутна) константа M, таква да је

$$|P_{m,n}(x)|, |Q_{m,n}(x)| \le M;$$

б) Нека је

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k P_{m_k,n_k}(x) \tag{31}$$
$$\Psi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k Q_{m_k,n_k}(x),$$

где су m_k, n_k низови природних бројева, а α_k реалних бројева, такви да је $m_{k+1} > m_k + 2n_k$, и $\alpha_k \log n_k \to +\infty$.

Доказати да редови у (31) равномерно конвергирају, и да су Φ и Ψ непрекидне функције;

б) Доказати да Фуријеов ред функције Φ дивергира за $x = 0$;

в) Доказати да Фуријеов ред функције Ψ конвергира за све x, али да је конвергенција неравномерна.

[Упутство: Фуријеови редови датих функција се добијају од редова (31), расписивањем чланова.]

7. Ако је $f \in C^k(\mathbf{R})$ 2π-периодична функција, тада је $a_n, b_n = O(1/n^k)$. Ако је f ограничене варијације, тада је $a_n, b_n = O(1/n)$.

8. а) Ако је H унитаран простор онда је

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2); \tag{32}$$

б) Примером показати да (32) не важи у простору $\mathbf{R}^k$ са нормом $||x||_p = \left(\sum_{j=1}^k |x_j|^p\right)^{1/p}$, за $p \neq 2$.

9. Кретање зице која трепери дужине π са фиксираним крајевима, почетним положајем g и почетном брзином h описано је функцијом $u = u(x,t)$ где је t време, $x \in [0,\pi]$ тачка на жици, а u одступање од равнотежног положаја. Функција u задовољава једначине:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = g(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = h(x) \end{cases} \tag{33}$$

а) Ако u има раздвојене промењљиве, то јест $u(x,t) = X(x)T(t)$ показати да функција X задовољава Штурм-Лјувилов проблем

$$\begin{cases} X''(x) = \lambda X(x) \\ X(0) = X(\pi) = 0; \end{cases} \tag{34}$$

б) Ако се зна да је опште решење једначине $X'' = \lambda X$ дато са $X(x) = A\cos\sqrt{-\lambda}x + B\sin\sqrt{-\lambda}x$ (A, B константе), ако је $\lambda > 0$, односно $X(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$, за $\lambda < 0$, доказати да су сва решења проблема (34) дата са

$$X(x) = A\sin nx;$$

в) Ако се претопстави да је решење проблема (33) облика $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} T_n(t)\sin nx$, формалним диференцирањем показати да функције T_n задовољавају Кошијев проблем

$$(35)\qquad \begin{cases} T_n''(t) + a^2n^2T_n(t) \\ T_n(0) = b_n(g) \\ T_n'(0) = b_n(h), \end{cases}$$

где су $b_n(g)$, $b_n(h)$ Фуријеови коефицијенти функција g и h (односно њихових непарних продужења);

г) Решити проблем (35), и написати формално решење проблема (33) у облику реда. (Фуријеов метод).

10. а) Дат је низ функција $f_n : [0,1] \to [0,1]$ дат са $f_n(t) = \sqrt{n}$ за $0 < t < 1/n$, и $f_n(t) = 0$ иначе. Доказати да $f_n \to 0$ тачка по тачка, али да $f_n \nrightarrow 0$ у средње квадратној метрици;

б) Нека је $g_{n,k}(x)$ карактеристична функција интервала $((k-1)/n, k/n]$, за $n \geq 1$ и $k = 1, 2, \dots, n$, и нека је низ f_n добијен ређањем функција $g_{n,k}$ у следећем поретку

$$g_{1,1}, g_{2,1}, g_{2,2}, g_{3,1}, g_{3,2}, g_{3,3}, \dots$$

Доказати да $f_n \to 0$ у средње квадратној метрици, али не и обично (тачка по тачка).

11. Написати Фуријеов ред функције $f(t) = \frac{1}{2}(\operatorname{sgn}(\cos t) + \operatorname{sgn}(\sin t))$, израчунати његов збир и $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2n+1)t}{2n+1}$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2n+1)}{2n+1}$.

12. Нека је $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ парна, на $[0, 2\pi]$ интеграбилна функција са периодом 2π, $\frac{1}{2}a_0 + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k \cos kt$ њен Фуријеов ред и $f(\pi - t) = -f(t)$ за $t \in \mathbf{R}$. Доказати да је $a_k = \frac{2}{\pi}(1-(-1)^k)\int_0^{\pi/2} f(t)\cos kt\,\mathrm{d}t$ за $k = 0, 1, 2, \dots$, $\pi^2/4 - t^2 = \frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{\cos(2n+1)t}{(2n+1)^3}$ за $|t| \leq \pi/2$ и израчунати $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$.

13. Нека је $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \sin kt$ Фуријеов ред интеграбилне функције $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ са периодом 2π и особином $f(-t) = -f(t) = f(\pi - t)$ за $t \in \mathbf{R}$. Доказати: а) $b_k = (1 + (-1)^k)\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} f(t)\sin kt\,\mathrm{d}t$ за $k = 1, 2, \dots$; б) $\cos t = \frac{8}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{n \sin nt}{4n^2-1}$, за $0 < t < \pi$ и израчунати $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin 8n}{4n^2-1}$.

14. Развити функцију $f(t) = |\arcsin(\sin t)|$ у Фуријеов ред. Израчунати његов збир и суме $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin(2k+1)}{(2k+1)^3}$, $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^6}$.

15. Нека је $\lambda \neq 0$ реалан број. а) Израчунати збир Фуријеовог реда 2π периодичне функције $f_\lambda : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_\lambda(t) = \pi e^{\lambda t}$ за $0 < t < 2\pi$; б) Израчунати $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2+\lambda^2}$.

16. Доказати да је $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{4n^2-1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\sin\frac{x}{2}$ за све $x \in [0, 2\pi]$.

17. Користећи Фуријеов ред функције $x\sin x$ на интервалу $[-\pi,\pi]$ израчунати $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-1}$ и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2-1}\sin nt$.

18. а) Написати Фуријеов ред функције $f(t)=(-1)^{[\frac{3|t|}{\pi}]}$ и израчунати његов збир; б) Израчунати $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(3k+1)^2}$, $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(3k+2)^2}$.

19. Написати Фуријеов ред функције $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(t/2))$ па израчунати збирове

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\sin nx\cos ny}{n},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\sin nx}{n}\right)^2,\ \text{за } 0<x,y<\pi.$$

20. Доказати да је $\frac{\pi}{2a}\frac{\operatorname{ch} at}{\operatorname{sh} a\pi}=\frac{1}{2a^2}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nt}{a^2+n^2}$, за $|t|\le\pi$ и $a\in\mathbf{R}$, $a\ne 0$, па израчунати $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\cos nt}{n^2}$.

21. Нека је $\alpha\in\mathbf{R}$, $f_\alpha:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 2π периодична функција, и g 2π-периодична интеграбилна на $[-\pi,\pi]$, $f_\alpha(t)=\sin\alpha t$, $|t|\le\pi$. а) Написати Фуријеов ред функције f_α и израчунати његов збир; б) Израчунати $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_\alpha(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

22. Доказати да је $\pi\operatorname{sgn}(\cos t)=4\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cos(2n+1)t$ за све $t\in\mathbf{R}$ па израчунати $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin(2n+1)t$ за $|t|\le\pi$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$.

23. Нека је $0\le\alpha\le\pi$ и f_α 2π периодична функција на $\mathbf{R}$, $f_\alpha(x)=2x+|x-\alpha|-|x+\alpha|$ за $|x|<\pi$ и $f_\alpha(x)=0$ за $|x|=\pi$. а) Написати Фуријеов ред функције f_α; б) Израчунати $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{nx}$ и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\sin nx}{nx}\right)^2$ за $0<x<\pi$.

24. Нека је $0<h<\pi$ и $\Phi_h(t)=\frac{\pi}{4h}(1+\operatorname{sgn}(\cos t-\cos h))$ за $t\in\mathbf{R}$. Написати Фуријеов ред функције Φ_h па израчунати а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2$, б) $\int_{-1}^{1}\frac{|x-\sin n|}{n^2}\,\mathrm{d}x$ и $\int_0^1\frac{\log(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

25. а) Доказати $\frac12+\cos 2x+\cos 4x+\cdots+\cos 2kx=\frac{\sin(2k+1)x}{2\sin x}$, $\cos x+\cos 3x+\cdots+\cos(2k-1)x=\frac{\sin 2kx}{2\sin x}$; б) Показати да се функције $S_m(x)=\frac{\sin mx}{\sin x}$ могу додефинисати у тачкама облика $k\pi$ тако да буду непрекидне. У том случају показати и да су $S'_m(x)$ непрекидне, као и да важи $|S_m(x)|\le m$, $|S'_m(x)|\le m^2$ за све $x\in(-\infty,+\infty)$ и $m=1,2,\ldots$; в) Показати да су функције $f(x)=\sum\limits_{m=1}^{+\infty}a^m S_m(x)$, $|a|<1$ и $f'(x)$ непрекидне и функцију $f(x)$ развити у Фуријеов ред.

26. Одредити функцију $\varphi:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$ из једначина $\int_0^{+\infty}\varphi(y)\cos xy\,\mathrm{d}y=\frac{1}{1+x^2}$, $\int_0^{+\infty}\varphi(y)\sin xy\,\mathrm{d}y=\begin{cases}(\pi/2)\sin x, & 0\le x<\pi\\ 0, & x\ge\pi\end{cases}$.

27. Функције $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1\\ 0, & |x|\ge 1\end{cases}$, и $g(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$ представити помоћу Фуријеовог интеграла.

28. Нека су $f_{n,k} : [0,1] \to \mathbf{R}$, карактеристичне функције интервала $((2k-1)/2^n - 1/4^n, (2k-1)/2^n + 1/4^n)$, $n \geq 1$, $1 \leq k \leq 2^{n-1}$.

а) Показати да је низ делимичних сума реда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n \sum\limits_{k=1}^{2^{n-1}} f_{n,k}$ Кошијев низ у простору $R^2[0,1]$. [Упутство: показати да $\sum_n \sum_k ||nf_{n,k}||^2$ конвергира.]

б) Показати да дати низ није конвергентан (у средње квадратној метрици). [Упутство: Претпоставити супротно, да постоји $f \in R^2[0,1]$ њен лимес. Ако су $c_1, \ldots, c_m$ њене несвојствене тачке, онда f мора бити ограничена ван $\cup_{j=1}^m (c_j - \delta, c_j + \delta)$. Оценити затим норму $||f - \sum_{n \leq N} f_{n,k}||$ користећи чињеницу да је скуп $\{(2k-1)/2^n\}$ свуда густ у $(0,1)$.]

29. Нека је $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ и $w : (a,b) \to \mathbf{R}$ позитивна локално интеграбилна функција. Доказати да је скуп $\mathcal{R}((a,b), w) = \{f : (a,b) \to \mathbf{C} | \int_a^b |f(x)|^2 w(x)\,\mathrm{d}x < +\infty\}$ (интегтрал може мати и несвојствене тачке унутар (a,b)) векторски простор, као и да је пресликавање

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}w(x)\,\mathrm{d}x$$

скаларни производ на $\mathbf{R}^2((a,b),w) = \mathcal{R}^2((a,b),w)/ \sim$, где је $\sim$ погодно одабрана релација еквиваленције.

30. а) Показати да је систем *Лагерових полинома* $L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(e^{-x}x^n)$ ортонормиран систем у $R^2((0,+\infty), e^{-x})$;

б) Показати да је систем *Ермитових полинома* $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(e^{-x^2})$ ортогоналан систем у $R^2((-bb,+\infty), e^{-x^2})$;

в) Показати да је систем *Чебишевљевих полинома* $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ ортогоналан систем у $R^2((-1,1), \frac{1}{\sqrt{1-x^2}})$;

г) Показати да је систем *Лежандрових полинома* $P_n(x) = \frac{1}{n!2^n} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(1-x^2)$ ортогоналан у $R^2(-1,1)$.

31. Нека је са u_λ означено решење диференцијалне једначине

$$-u'' + qu = \lambda u \quad u(a) = u(b) = 0.$$

Доказати да је за $\lambda \neq \mu$, $u_\lambda \perp u_\mu$ у простору $R^2[a,b]$.

32. Нека је функција y интеграбилна на $\mathbf{R}$ заједно са прва два своја извода, задовољава диференцијалну једначину $ay'' + by' + cy = f$, где су $a, b, c \in \mathbf{R}$ и f интеграбилна на $\mathbf{R}$ функција. Доказати да њена Фуријеова трансформација $\hat{y}$ задовољава алгебраску једначину $(-a\lambda^2 + ib\lambda + c)\hat{y} = \hat{f}$.

33. Простирање топлоте у жици бесконачне дужине описано је парцијалном диференцијалном једначином другог реда

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

где је $k > 0$ константа, $u(t,x)$ темепература у тренутку $t \geq 0$, на положају $x \in \mathbf{R}$. Зна се још да је $u(t, \pm\infty) = 0$, као и да је почетна температура $u(0,t) = \varphi(x)$.

а) Доказати да Фуријеова трансформација $\hat{u}$ (по x) задовољава обичну диференцијалну једначину:

$$\hat{u}'_t(t,\lambda) = -k\lambda^2 \hat{u}(t,\lambda);$$

б) Доказати да је последња једначина еквивалентна са

$$(e^{k\lambda^2}\hat{u})'_t = 0;$$

в) Користећи почетни услов решити решити дату једначину.